文科高等数学

1.6 定积分

1.6.1 定积分概念

考虑一个沿直线运动的物体走过的路程。
如果速度是一个固定的常数，那么距离= 速度×时间。
而如果变速直线运动速度 y 随时间x 而变化：y = f (x) ，注意到速度是路程函数S(x)的导数， S’(x) = f (x), 路程函数S(x)应该是速度f (x)的一个原函数。
则物体在时间段[a,b] 上经过的路程为S(b)- S(a)。
这里的f(x)的原函数有很多个，但原函数的选取并不影响最终的结果，这是因为
（S(b) + C） - (S(a) + C) = S(b) － S(a)
设 f(x) 是定义在[a,b] 上的连续函数, F(x) 是 f (x) 的一个原函数，则我们引入如下常用记号

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

1.6.2 定积分的基本性质

设 $f(x)$, $g(x)$ 均为可积函数,则有

性质 1 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \cdots$, 即定积分与积分变量的选取无关.

性质 2 $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

性质 3 $\int_a^b 0\ \mathrm{d}x = 0.$

性质 4 $\int_a^b \mathrm{d}x = b - a$, 当 $b > a$ 时,即为区间长度.

性质 5 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

性质 6 $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, k 是任意常数.

性质 7 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 c 可为函数 $f(x)$ 的可积区间上的任意实数,不必在 a 与 b 之间. 此性质称为定积分的**可加性**.

1.6.3 定积分的简单计算实例

例 1.6.1 求 $\int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x$.

解 因 $-\cos x$ 是 $\sin x$ 的一个原函数,故

$$\text{原式} = (-\cos x)\Big|_0^{\pi} = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 2.$$

例 1.6.2 求 $\int_{-1}^{2}|x|\mathrm{d}x$.

解 注意被积函数有绝对值. 故

$$\text{原式}=\int_{-1}^{0}|x|\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}|x|\mathrm{d}x \qquad \text{（可加性）}$$

$$=\int_{-1}^{0}(-x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}x^{2}\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{2}x^{2}\Big|_{0}^{2} \qquad \text{（基本定理）}$$

$$=\frac{1}{2}((-1)^{2}-0)+\frac{1}{2}(4-0)=\frac{5}{2}.$$

单选题 1分

设置

$$\int_0^3 |x-1|dx =$$

A 3/2

B 3

C 5/2

D 5

提交

单选题 1分

设置

若$\int_0^1 (2x^4 + kx)\,dx = 2$（其中k为常数），则k=

A 3/2

B 8/5

C 3/4

D 16/5

提交

单选题 1分

设置

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x \, dx\right)' =$$

A 0

B 1

C π/2

D π

提交

1.6.4 定积分的计算

1. 定积分的换元法

我们从前面几个例子看到,定积分是通过原函数来计算的,因此也就是先计算不定积分,再代之上下限的值. 可见定积分计算与不定积分的计算只差最后的代值. 于是定积分的计算完全可沿用不定积分的换元法与分部积分法. 先回忆不定积分的换元公式

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \xlongequal{x=\varphi(t)} \int f(x)\,\mathrm{d}x,$$

从左到右是第一换元法(凑微分);从右到左是第二换元法.

在上述公式中写上对应的积分上下限,就成为定积分的换元公式,我们特别把它叙述成下述定理.

定理 1.6.2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且函数 $x=\varphi(t)$ 满足:

(1) 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数 $\varphi'(t)$;

(2) 当 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上从 α 变到 β 时,$\varphi(t)$ 单调地从 a 变到 b;

(3) $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$,

则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

注 应用上述定理计算定积分时，最重要的一点是注意积分上下限的对应关系. 即下限 a 对应着下限 α，上限 b 对应着上限 β，不管它们的大小关系如何. 定积分与不定积分的换元差别在于：不定积分的结果是函数，积分变量（自变量）应回代到原变量；而定积分的结果是数值，就不必回代成原变量后再代入原来的上下限，只要按新变量的对应上下限代入计算即可. 而它们的相同的地方是换元 $x=\varphi(t)$ 的选择，无论是用第一换元法（凑微分形式）还是用第二换元法都是一样的. 定积分与不定积分换元法的这种变与不变，深刻地刻画出它们之间的联系与区别.

例 1.6.3 不定积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} \xlongequal{t=\sqrt{x}} \int \frac{2t\mathrm{d}t}{1+t}$$

$$= 2t - 2\ln|1+t| + C \xlongequal{\text{回代 } t=\sqrt{x}} 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C;$$

定积分

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} \xlongequal{t=\sqrt{x}} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t\mathrm{d}t}{1+t} = (2t - 2\ln|1+t|)\Big|_1^{\sqrt{2}}$$

$$\xlongequal{\text{不必回代 } t=\sqrt{x}} [2\sqrt{2} - 2\ln(1+\sqrt{2})] - (2 - 2\ln 2)$$

$$= 2\sqrt{2} - 2 + 2\ln 2 - 2\ln(1+\sqrt{2}).$$

例 1.6.4 求 $\int_0^{\sqrt{a}} x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

解一 原式 $=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{a}}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2)$ （凑微分 $\mathrm{d}(x^2)$，积分变量未改，上下限也不改）

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\Big|_0^{\sqrt{a}}=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^0)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^a-1).$$

解二 原式 $=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{a}}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2)$ （凑微分 $\mathrm{d}(x^2)$，积分变量未改，上下限也不改）

$=\frac{1}{2}\int_0^{a}\mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u$ （换元，积分变量改了，上下限也要改）

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{u}\Big|_0^{a}=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^a-1).$$

从上例的两种解法，要看清上下限的改变是与积分变量的改变同步且对应的.

(2) $\int_{0}^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\, dx$

(2) $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\,dx$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{\sin x}\,|\cos x|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} \cdot \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\sin x} \cdot (-\cos x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} d \sin x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\sin x} d \sin x = \frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{4}{3}\text{。}$$

2. 定积分的分部积分法

回忆不定积分的分部积分公式 $\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$，在此公式中写出上下限，就成为定积分的分部积分公式：

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x).$$

公式的用法与不定积分的公式相仿.

例 1.6.5 求 $\int_0^1 x e^x dx$.

解 原式 $= \int_0^1 x de^x$ （凑微分 de^x）

$= xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$ （用分部积分公式）

$= e - 0 - e^x \Big|_0^1 = e - (e - e^0) = 1.$

4. 求$\int_0^1 x^2 e^x dx$.

4. 求 $\int_0^1 x^2 e^x dx$.

解： $\int_0^1 x^2 e^x dx = \int_0^1 x^2 de^x = x^2 e^x |_0^1 - 2\int_0^1 xe^x dx$

$= e - 2[xe^x |_0^1 - \int_0^1 e^x dx]$

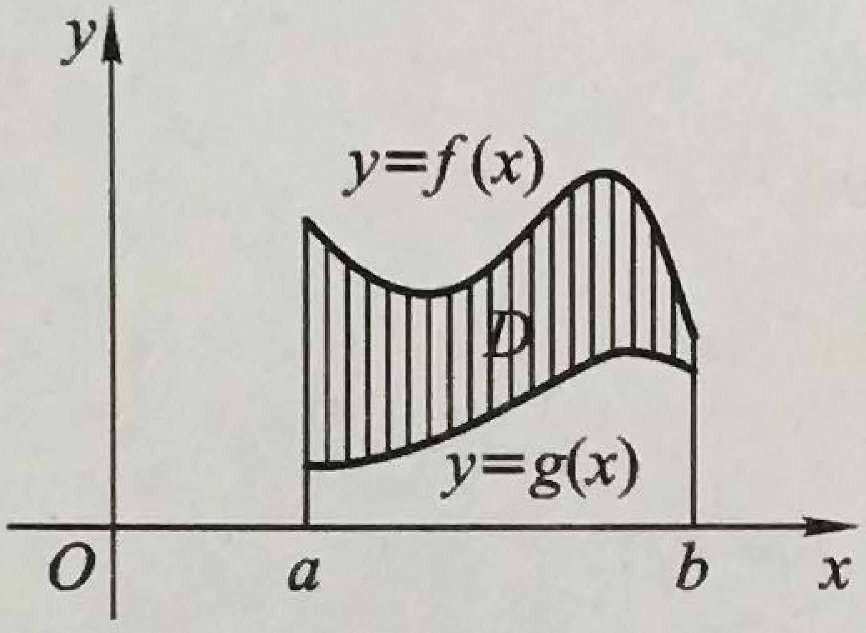
$= e - 2[e - e^x |_0^1] = e - 2$.

$$\int_{0}^{3} (32x^{3} + 4x)\,dx$$

文科高等数学

1.7 积分应用

1.7.1 用定积分计算平面图形面积



（3）由直线 $x=a, x=b$ 与曲线 $y=f(x), y=g(x), g(x)\leqslant f(x), x\in[a,b]$，围成的图形 D 的面积：

公式 1.7.1 $S=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x.$

例 1.7.1 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的面积. 其中 $a>0,b>0$

解 根据图形的对称性,整个椭圆面积 S 是第一象限部分 D_1 面积 S_1 的 4 倍. D_1 由曲线 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 与直线 $x=0,y=0$ 围成(设想其右边还有一条退化的边界线:$x=a$)(图 1.61).

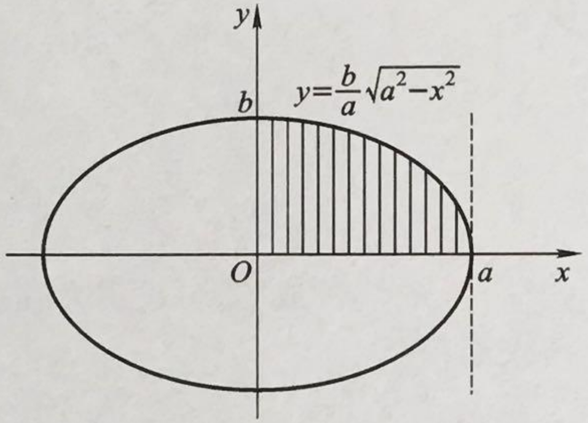


图 1.61

于是按公式 1.7.1,

$$S=4S_1=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x \xlongequal{x=a\sin t} \frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot a\cos t\mathrm{d}t=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=2ab\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\mathrm{d}t\right]=2ab\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\pi ab.$$

特别当 $a=b$ 时,即得圆面积公式 $S=\pi a^2$.

例 1.7.2 求曲线 $y=\sqrt{x}$, $y=-\sin x$ 与直线 $x=\pi$ 围成的图形面积(图 1.62).

解 按公式 2.7.1,图形 D 的面积

$$S=\int_0^{\pi}\left[\sqrt{x}-(-\sin x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\pi}+(-\cos x)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{\pi}+(-\cos\pi-(-\cos 0))=\frac{2}{3}\pi\sqrt{\pi}+2.$$

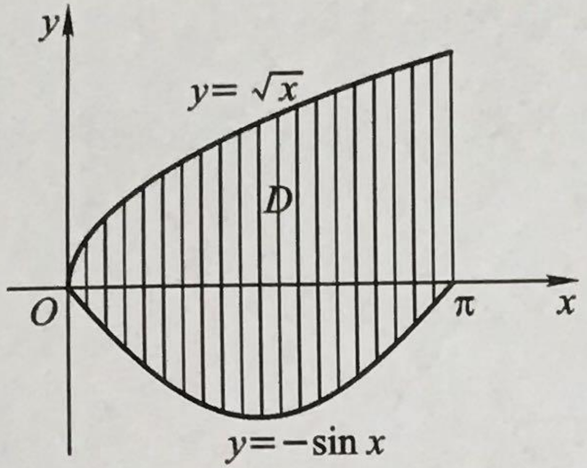


图 1.62

例 1.7.3 求曲线 $x=y^2$ 与 $x=y+2$ 围成的图形面积.

解一 先画图，然后求出边界曲线的交点坐标：$\begin{cases} x=y^2, \\ x=y+2 \end{cases}$ $A=(4,2)$，$B=(1,-1)$（图 1.63）.

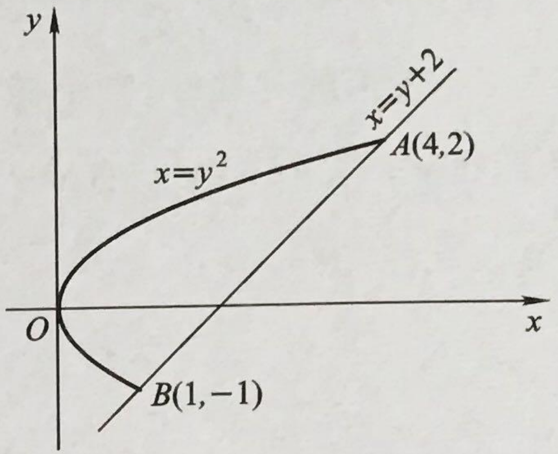


图 1.63

解二 将图形看成由 $x=0$，$x=4$ 与 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 围成，此时

$$f(x)=\sqrt{x},0\leqslant x\leqslant 4,g(x)=\begin{cases} -\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ x-2, & 1\leqslant x\leqslant 4. \end{cases}$$

于是按照公式 1.7.1，面积

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 [\sqrt{x}-(-\sqrt{x})]\mathrm{d}x+\int_1^4 [\sqrt{x}-(x-2)]\mathrm{d}x \\ &=2\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x+\int_1^4 (\sqrt{x}-x)\mathrm{d}x+2\int_1^4 \mathrm{d}x \\ &=2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^4+2\cdot(4-1) \\ &=\frac{4}{3}\cdot(1-0)+\left(\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\cdot 4^2\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 1\right)+6=\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

求由曲线$y=\dfrac{3}{x}$与$x+y=4$所围成的平面图形的面积.

求由曲线 $y=\dfrac{3}{x}$ 与 $x+y=4$ 所围成的平面图形的面积.

解 $\begin{cases} y=\dfrac{3}{x} \\ x+y=4 \end{cases}$，得交点 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$，$\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$. 则

$$S=\int_1^3\left[(4-x)-\frac{3}{x}\right]dx=8-\frac{1}{2}x^2\Big|_1^3-3\ln x\Big|_1^3=4-3\ln 3.$$

单选题 1分

设置

求由曲线$y = \sqrt{x}$ 与y=x所围成的平面图形面积

A 1/6

B 1/3

C 1/2

D 1

提交

单选题 1分

设置

求由曲线$y = e^{x}$, $y = e^{-x}$及直线x=1所围成的平面图形面积

A e

B e^{-1}

C $e + e^{-1}$

D $e + e^{-1} - 2$

提交

求由直线$y=x$，$x+y=2$及$2x-y=4$所围成的平面图形的面积.

求由直线 $y=x$， $x+y=2$ 及 $2x-y=4$ 所围成的平面图形的面积

曲线交点坐标 $\begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}$, $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$,

$$S=\int_1^2[x-(2-x)]dx+\int_2^4[x-(2x-4)]dx=3.$$


WiFi密码
$= \int_{-5}^{5} \frac{x^3 sin^2 x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx$

1.6.13 设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的可积奇函数，证明：$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

证明：$\because$ $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上的可积奇函数

故 $f(-x) = -f(x)$，

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

而 $\int_{-a}^{0} f(x)dx \overset{x=-t}{=} \int_{a}^{0} f(-t)d(-t) = -\int_{0}^{a} f(t)dt$

因此 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$.